МАТЕМАТИКА

УДК 519.718

М. А. Алехина, Д. М. Клянчина

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО НАДЕЖНОСТИ СХЕМАХ В НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ БАЗИСАХ[1]

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе B, содержащем специальные функции. Предполагается, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0,1/2)$ подвержены неисправностям типа 0 на выходах. Доказано, что почти для всех булевых функций асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$. Эта оценка ненадежности в два раза меньше, чем в случае инверсных неисправностей на выходах элементов в соответствующих базисах.

Ключевые слова: булевы функции, функциональные элементы, асимптотически оптимальный, надежность.

Abstract. An article examines an implementation of the Boolean functions in the circuits with unreliable functional elements in complete finite B basic sets, containing special functions. It is assumed that all the circuit elements irrespective of each other are subject to 0 type failures at the outputs with the probability $\varepsilon \in (0,1/2)$. The article proves that the circuits with asymptotically optimum reliability implement Boolean functions with the value of unreliability being equal ε when $\varepsilon \to 0$. The present value of unreliability is twice lower in comparison with inverse failures at the outputs of the relevant basic sets' elements.

Keywords: Boolean functions, functional elements, asymptotically optimum reliability.

Введение

Введем множества булевых функций:

$$M_1 = \{ \bar{x}_1(x_2 \vee x_3), \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_3), \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3), \bar{x}_1 \vee x_2 x_3, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_3, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \};$$

$$M_2 = \{ (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3), (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3),$$

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3), (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \& \& (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3),$$

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \}; M_3 = \{ (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \}.$$

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов [1] в полном конечном базисе B, содержащем некоторую функцию из множества $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Считаем, что схема реали-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, номер проекта 09-06-28615а/В.

зует функцию $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a} = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f\left(\tilde{a}\right)$. Допустим, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε (ε∈(0,1/2)) переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию, а в неисправном – константу 0.

Пусть $P_{\overline{f(\tilde{a})}}(S, \tilde{a})$ – вероятность появления $\overline{f(\tilde{a})}$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$, при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\overline{f(\tilde{a})}}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы S равна $(1 - P(S))$.

Пусть $P_{\varepsilon}\left(f\right) = \inf P\left(S\right)$, где S – схема из ненадежных элементов, реализующая булеву функцию f. Схему A из ненадежных элементов, реализующую булеву функцию f, назовем асимптотически оптимальной по надежности, если $P\left(A\right) \sim P_{\varepsilon}\left(f\right)$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{P\left(A\right)}{P_{\varepsilon}\left(f\right)} = 1$.

Пусть B_3 – множество всех булевых функций, зависящих от трех переменных x_1, x_2, x_3.

В работе [2] введены множества функций G_1, G_2, G_3, G_4, где G_1 – множество функций, конгруэнтных функциям $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$; G_2 – множество булевых функций, зависящих от переменных x_1, x_2, x_3 и конгруэнтных функциям $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3}, \sigma_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3\}$; G_3 – множество функций, конгруэнтных функциям $x_1^{\sigma_1} x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$, $\sigma_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3\}$; G_4 – множество функций, зависящих от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 и конгруэнтных функциям $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} x_4^{\sigma_4}$ или $(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2})(x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4})$, где $\sigma_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3,4\}$.

Обозначим $G = G_1 \cap G_2 \cap G_3$ ($|G| = 56$). В случае инверсных неисправностей на выходах элементов доказано [2], что если полный конечный базис B содержит некоторую функцию множества G, то любую функцию f в этом базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq \varepsilon + 200\varepsilon^2$ при всех ε∈(0,1/960]. Последнее утверждение верно и в случае неисправностей типа 0 на выходах элементов [3–5]. Учитывая, что при неисправностях типа 0 на выходах элементов любая схема, содержащая хотя бы один функциональный элемент и реализующая отличную от константы 0 функцию, имеет ненадежность не менее ε [3], получаем следующий результат: если полный конечный базис B содержит некоторую функцию множества G, то для почти всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε при ε → 0. Это свойство базиса будем называть ε-свойством.

Множество G является критериальным (исчерпывающим) [2], если базис B содержит только функции трех переменных, т.е. $B \subseteq B_3$, а его элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах. В работе [6] доказано, что функции множества G не являются исчерпывающими, если базис $B \subseteq B_3$, а базисные элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах. В работе [6] найдено такое множество M^* функций трех переменных, что если полный конечный базис B содержит некоторую функцию множества M^*, то базис B обладает ε-свойством. Ответ на вопрос «Является ли множество $M^* \cap G$ исчерпывающим, если полный конечный базис $B \subseteq B_3$, а его элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах?» получен в этой работе. Ответ отрицательный, далее будет доказано, что множество G не является исчерпывающим в случае неисправностей типа 0 на выходах элементов и $B \subseteq B_3$.

Функции множества M исследовал А. В. Васин [7]. Для инверсных неисправностей на выходах элементов он доказал, что:

1) если полный конечный базис B содержит некоторую функцию множества M, то любую функцию f в этом базисе можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \le 2\varepsilon + 204\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,1/960]$;

2) если базис $B \subseteq B_3 \backslash G$ и $B \cup M \ne \varnothing$, то в базисе B почти для всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$. Эта асимптотическая оценка ненадежности в два раза хуже аналогичной оценки при неисправностях типа 0 на выходах элементов, полученной в этой работе.

Вспомогательные ранее известные результаты

Обозначим через f^{σ} функцию f, если $\sigma = 1$, и функцию $\overline{f}$, если $\sigma = 0$, а схему, реализующую функцию f^{σ} ($\sigma \in \{0,1\}$), будем обозначать S^{σ}.

Пусть схема S_g реализует функцию $g \in G_4$ (напомним, что $g = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} x_4^{\sigma_4}$, или $g = (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2})(x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4})$, $\sigma_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$). Возьмем схему S^{σ_1}, реализующую функцию f^{σ_1}, схему S^{σ_2}, реализующую функцию f^{σ_2}, схему S^{σ_3}, реализующую функцию f^{σ_3}, и схему S^{σ_4}, реализующую функцию f^{σ_4}. Используя схемы S_g, S^{σ_1}, S^{σ_2}, S^{σ_3} и S^{σ_4}, построим схему (рис. 1), которую также обозначим $\Phi(S^1, S^0)$. Нетрудно проверить, что и в этом случае схема $\Phi(S^1, S^0)$ реализует функцию f. Всюду далее схему S^1 будем обозначать S.

Пусть схема S_g реализует функцию $g \in G_1$ (т.е. функция g имеет вид $g = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$, $\sigma_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$). Возьмем схему S^{σ_1}, реализующую функцию f^{σ_1}, схему S^{σ_2}, реализующую функцию f^{σ_2}, и схему S^{σ_3}, реализующую функцию f^{σ_3}. Используя схемы S_g, S^{σ_1}, S^{σ_2} и S^{σ_3}, построим схему $\Phi(S^0, S^1)$ (рис. 2). Нетрудно проверить, что схема $\Phi(S^0, S^1)$ реализует функцию f.

Операция Φ (рис. 1, 2) по схемам S и S^0, реализующим булевы функции f и $\overline{f}$ соответственно, строит схему $\Phi(S, S^0)$, реализующую функцию f. Результат n-кратного применения ($n \in \mathbf{N}$) операции Φ к схемам S и S^0 будем обозначать $\Phi^n(S, S^0)$. Применение операции Φ к некоторым схемам S и S^0 при некоторых условиях на их ненадежности $P(S)$ и $P(S^0)$ приводит к схемам, имеющим более высокую надежность, чем исходная схема S. В том случае, когда операция Ф применяется только к схемам S (т.е. когда все числа $\sigma_i = 1$), результат ее применения будем обозначать $\Phi(S)$. Если же операция Ф применяется только к схемам S^0 (т.е. когда все числа $\sigma_i = 0$), результат ее применения будем обозначать $\Phi(S^0)$.

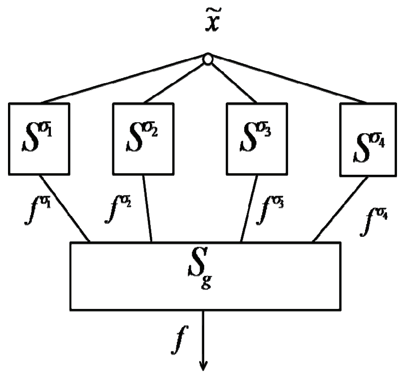

Рис. 1

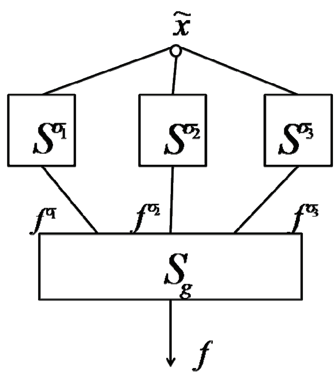

Рис. 2

Лемма 1 [3]. *Допустим, что произвольную функцию f можно реализовать схемой S с ненадежностью не больше p* ($p \le 1/2$). *Пусть S_g – схема, реализующая функцию $g \in G_1 \cup G_4$ с ненадежностью $P(S_g)$ ($P(S_g) \le 1/2$), причем v_0 и v_1 – вероятности ошибок схемы S_g на наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ и $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4)$ соответственно, если g зависит от четырех переменных, и на наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ соответственно, если g зависит от трех переменных. Тогда схема $\Phi(S, S^0)$ реализует функцию f с ненадежностью*

$$P(\Phi(S, S^0)) \le \max\{v_0, v_1\} + 4p \cdot P(S_g) + 6p^2, \text{ если } g \in G_4 \text{ (рис. 1)},$$

и

$$P(\Phi(S, S^0)) \le \max\{v_0, v_1\} + 3p \cdot P(S_g) + 3p^2, \text{ если } g \in G_1 \text{ (рис. 2)}.$$

Лемма 2 [8]. *В произвольном полном конечном базисе B любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, что при всех* $\varepsilon \in (0, 1/960]$ *ее ненадежность* $P(S) \le 5{,}2\varepsilon$.

Лемма 3 [6]. *Пусть схема S_h реализует функцию $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3}$, $\sigma_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3\}$ с ненадежностью $P(S_h)$, причем w_0, w_1 – вероятности ошибок схемы S_h на наборах* ($\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, 0), ($\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, 1). *Тогда можно построить такую схему S_g, реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3)^{\sigma_3}$, что $P(S_g) \le P(S_h) + 2\,p_{\oplus}$ ($p_{\oplus}$ – максимальная из ненадежностей схем, реализующих функции $x_1 \oplus x_2$ и $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ в рассматриваемом базисе), а для вероятностей ошибок v_1 и v_0 схемы S_g на наборах* (0,0,0) *и* (1,1,1) *выполняются неравенства:* $v_1, v_0 \le \max\{w_0, w_1\} + 2\,p_{\oplus}^2$.

Основные результаты

Лемма 4. *Пусть* $\varphi(x_1,x_2,x_3)\in M_1\cup B$, *тогда в базисе B функцию* $g\in G_4$ *можно реализовать такой схемой* S_g, *что при* $\varepsilon\in(0;1/2)$ *ее ненадежность* $P(S_g)\le 2\varepsilon$, *а вероятности ошибок* v_0 *и* v_1 *схемы* S_g *на наборах* $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$ *и* $(\bar\sigma_1,\bar\sigma_2,\bar\sigma_3,\bar\sigma_4)$ *соответственно удовлетворяют неравенствам* $v_0\le\varepsilon$ *и* $v_1\le\varepsilon$.

Доказательство. Пусть базис B содержит функцию из множества M_1. Возможны следующие варианты:

1. $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\bar x_1(\bar x_2\vee\bar x_3)$, тогда из нее подстановкой z_1 вместо x_1 и подстановкой z_2 вместо x_2 и x_3 получим функцию $\phi_1=\bar z_1\bar z_2$. Тогда $g=\varphi(\phi_1(z_1,z_2),x_2,x_3)=(z_1\vee z_2)(\bar x_2\vee\bar x_3)\in G_4$, причем $\sigma_1=1$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$, $\sigma_4=0$. Схему из двух элементов, реализующую функцию g, обозначим S_g. Вычислим вероятность ошибки v_0 на выходе схемы S_g на наборе $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)=$ (1, 1, 0, 0) и получим $v_0=\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки v_1 на выходе схемы S_g на наборе $(\bar\sigma_1,\bar\sigma_2,\bar\sigma_3,\bar\sigma_4)=$ (0, 0, 1, 1) и получим $v_1=0$.

2. $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\bar x_1(x_2\vee x_3)$, тогда из нее подстановкой z_1 вместо x_1 и подстановкой z_2 вместо x_2 и x_3 получим функцию $\phi_1=\bar z_1 z_2$. Тогда $g=\varphi(\phi_1(z_1,z_2),x_2,x_3)=(z_1\vee z_2)(\bar x_2\vee x_3)\in G_4$, причем $\sigma_1=1$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$, $\sigma_4=1$. Схему из двух элементов, реализующую функцию g, обозначим S_g. Вычислим вероятность ошибки v_0 на выходе схемы S_g на наборе $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)=$ (1, 1, 0, 1) и получим $v_0=\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки v_1 на выходе схемы S_g на наборе $(\bar\sigma_1,\bar\sigma_2,\bar\sigma_3,\bar\sigma_4)=$(0, 0, 1, 0) и получим $v_1=0$.

3. $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\bar x_1(\bar x_2\vee x_3)$, тогда из нее подстановкой z_1 вместо x_1 и x_3, подстановкой z_2 вместо x_2 получим функцию $\phi_2=\bar z_1\bar z_2$. Тогда $g=\varphi(\phi_2(z_1,z_2),x_2,x_3)=(z_1\vee z_2)(\bar x_2\vee x_3)$, причем $\sigma_1=1$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$, $\sigma_4=1$. Схему из двух элементов, реализующую функцию g, обозначим S_g. Вычислим вероятность ошибки v_0 на выходе схемы S_g на наборе $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)=$ (1, 1, 0, 1) и получим $v_0=\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки v_1 на выходе схемы S_g на наборе $(\bar\sigma_1,\bar\sigma_2,\bar\sigma_3,\bar\sigma_4)=$ (0, 0, 1, 0) и получим $v_1=0$.

Функция $\bar x_1(x_2\vee\bar x_3)$ конгруэнтна функции $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\bar x_1(\bar x_2\vee x_3)$, рассмотренной в п. 3, следовательно, для нее утверждение леммы верно.

4. $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\bar x_1\vee\bar x_2\bar x_3$, тогда из нее подстановкой z_1 вместо x_1 и подстановкой z_2 вместо x_2 и x_3 получим $\phi_1=\bar z_1\vee\bar z_2$. Тогда

$g=\varphi\big(\phi_1(z_1,z_2),x_2,x_3\big)=z_1z_2\vee\bar{x}_2\bar{x}_3\in G_4$, причем $\sigma_1=1$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$, $\sigma_4=0$. Схему из двух элементов, реализующую функцию g, обозначим S_g. Вычислим вероятность ошибки v_0 на выходе схемы S_g на наборе $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$ = (1, 1, 0, 0) и получим $v_0=\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки v_1 на выходе схемы S_g на наборе $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3,\bar{\sigma}_4)$ = (0, 0, 1, 1) и получим $v_1=\varepsilon$.

5. $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\vee x_2x_3$, тогда из нее подстановкой z_1 вместо x_1 и подстановкой z_2 вместо x_2 и x_3 получим $\phi_1=\bar{z}_1\vee z_2$. Тогда $g=\varphi\big(\phi_1(z_1,z_2),x_2,x_3\big)=z_1\bar{z}_2\vee x_2x_3\in G_4$, причем $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=1$, $\sigma_4=1$. Схему из двух элементов, реализующую функцию g, обозначим S_g. Вычислим вероятность ошибки v_0 на выходе схемы S_g на наборе $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$ = (1, 0, 1, 1) и получим $v_0=\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки v_1 на выходе схемы S_g на наборе $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3,\bar{\sigma}_4)$= (0, 1, 0, 0) и получим $v_1=\varepsilon$.

6. $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2x_3$, тогда из нее подстановкой z_1 вместо x_1 и x_3, подстановкой z_2 вместо x_2 получим функцию $\phi_2=\bar{z}_1\vee\bar{z}_2$. Тогда $g=\varphi\big(\phi_2(z_1,z_2),x_2,x_3\big)=z_1z_2\vee\bar{x}_2x_3\in G_4$, причем $\sigma_1=1$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$, $\sigma_4=1$. Схему из двух элементов, реализующую функцию g, обозначим S_g. Вычислим вероятность ошибки v_0 на выходе схемы S_g на наборе $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$ = (1, 1, 0, 1) и получим $v_0=\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки v_1 на выходе схемы S_g на наборе $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3,\bar{\sigma}_4)$= (0, 0, 1, 0) и получим $v_1=\varepsilon$.

Отметим, что функция $\bar{x}_1\vee x_2\bar{x}_3$ конгруэнтна функции $\bar{x}_1\vee\bar{x}_2x_3$, рассмотренной в п. 6, следовательно, для нее утверждение леммы верно.

Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Пусть полный конечный базис B содержит функцию* $\varphi\in M_1$. *Тогда любую булеву функцию f в базисе B можно реализовать такой схемой A, что при всех* $\varepsilon\in$ (0, 1/960] *верно неравенство* $P(A)\le\varepsilon+15\varepsilon^2$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1,x_2,x_3)\in M_1\cup B$. По лемме 4 функцию $g\in G_4$ (т.е. $g=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\vee x_3^{\sigma_3}x_4^{\sigma_4}$ или g = $(x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2})(x_3^{\sigma_3}\vee x_4^{\sigma_4})$, $\sigma_i\in\{0,1\}$, $i\in\{1, 2, 3, 4\}$) в базисе B можно реализовать такой схемой S_g, что $P(S_g)\le 2\varepsilon$, а вероятности ошибок v_0 и v_1 на наборах $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$ и $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3,\bar{\sigma}_4)$ удовлетворяют неравенствам $v_0\le\varepsilon$, $v_1\le\varepsilon$. Следовательно, $\max\{v_0, v_1\}\le\varepsilon$.

Пусть f – произвольная булева функция. По лемме 2 функции f и $\bar{f}$ можно так реализовать схемами S и S^0 соответственно, что $P(S)\le 5{,}2\varepsilon$ и $P(S^0)\le 5{,}2\varepsilon$. Используя схему S_g, а также схемы S^{σ_1}, S^{σ_2}, S^{σ_3} и S^{σ_4}, построим схему $\Phi(S, S^0)$, реализующую функцию f (рис. 1). По лемме 1 оценим ненадежность построенной схемы $\Phi(S, S^0)$, полагая $p = 5{,}2\varepsilon$. Получаем неравенство

$$P\,(\Phi(S, S^0)) \le \max\{v_0, v_1\} + 4p \cdot P(S_g) + 6p^2 \le \varepsilon + 4 \cdot 5{,}2\varepsilon \cdot 2\varepsilon + 6 \cdot (5{,}2\varepsilon)^2 \le$$

$$\le \varepsilon + 204\varepsilon^2 \le 1{,}3\varepsilon \text{ при } \varepsilon \in (0;1/960].$$

По схеме $\Phi(S, S^0)$ построим схему $\Phi^2(S, S^0)$ и снова применим лемму 1 для оценки ненадежности схемы $\Phi^2(S, S^0)$, полагая $p = 1{,}3\varepsilon$. Получаем неравенство

$$P(\Phi^2(S, S^0) \le \max\{v_0, v_1\} + 4p \cdot P(S_g) + 6p^2 \le \varepsilon + 4 \cdot 1{,}2\varepsilon \cdot 2\varepsilon + 6 \cdot (1{,}2\varepsilon)^2 \le$$

$$\le \varepsilon + 19\varepsilon^2 \le 1{,}02\varepsilon \text{ при } \varepsilon \in (0;\ 1/960].$$

По схеме $\Phi^2(S, S^0)$ построим схему $\Phi^3(S, S^0)$ и по лемме 1 оценим ненадежность схемы $\Phi^3(S, S^0)$, полагая $p = 1{,}02\varepsilon$:

$$P(\Phi^3(S, S^0)) \le \max\{v_0, v_1\} + 4p \cdot P(S_g) + 6p^{\,2} \le$$

$$\le \varepsilon + 4 \cdot 1{,}02\varepsilon \cdot 2\varepsilon + 6 \cdot (1{,}02\varepsilon)^2 \le \varepsilon + 15\varepsilon^2.$$

Схема $\Phi^3(S, S^0) = A$ – искомая.

Теорема 1 доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in M_2 \cup B$, *тогда в базисе* B *функцию* $h \in G_2$ (т.е. $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3}$, $\sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1, 2, 3\}$) *можно реализовать такой схемой* S_h, *что* $P(S_h) \le 2\varepsilon$, *а вероятности ошибок* w_0, w_1 *на выходе схемы* S_h *на наборах* $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 1)$, $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 0)$ *соотвественно удовлетворяют неравенствам* $w_0 \le \varepsilon$, $w_1 \le \varepsilon$.

Доказательство. Проверим верность леммы для функций множества M_2.

1. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$. Тогда $h(x_1, x_2, x_3) = \varphi(\varphi(x_1, x_1, x_2), x_3, x_3) = x_1 \bar{x}_2 \oplus x_3$, т.е. $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 1$. Поскольку для реализации функции h двух элементов достаточно, верно неравенство $P(S_h) \le 2\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки w_0 на выходе схемы S_h на наборе $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 1) = (0,1,1)$ и получим $w_0 = \varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки w_1 на выходе схемы S_h на наборе $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 0) = (0,1,0)$ и получим $w_1 = 0$.

2. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$. Тогда $h(x_1, x_2, x_3) = \varphi(\varphi(x_1, x_2, x_1), x_3, x_1) = x_1 x_2 \oplus \bar{x}_3$, т.е. $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$. Поскольку для реализации функции h двух элементов достаточно, верно неравенство $P(S_h) \le 2\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки w_0 на выходе схемы S_h на наборе $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 1) = (0,0,1)$ и получим $w_0 = \varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки w_1 на выходе схемы S_h на наборе $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 0) = (0,0,0)$ и получим $w_1 = \varepsilon$.

3. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$. Тогда $h(x_1, x_2, x_3) = \varphi(\varphi(x_1, x_1, x_2), x_3, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \oplus x_3$, т.е. $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$. Поскольку для реализации функции h двух элементов достаточно, верно неравенство $P(S_h) \le 2\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки w_0 на выходе схемы S_h на наборе $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 1) = (1,0,1)$ и получим $w_0 = \varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки w_1 на выходе схемы S_h на наборе $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 0) = (1,0,0)$ и получим $w_1 = 0$.

4. Пусть $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)$. Тогда $h(x_1,x_2,x_3) = \varphi(\varphi(x_1,x_1,x_2),x_1,x_3)=x_1\bar{x}_2\oplus x_3$, т.е. $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=1$. Поскольку для реализации функции h двух элементов достаточно, верно неравенство $P(S_h)\le 2\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки w_0 на выходе схемы S_h на наборе $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,1)=(0,1,1)$ и получим $w_0=\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки w_1 на выходе схемы S_h на наборе $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,0)=(0,1,0)$ и получим $w_1=\varepsilon$.

5. Пусть $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)$. Тогда $h(x_1,x_2,x_3) = \varphi(\varphi(x_1,x_1,x_2),x_1,x_3)=x_1x_2\oplus\bar{x}_3$, т.е. $\sigma_1=1$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$. Поскольку для реализации функции h двух элементов достаточно, верно неравенство $P(S_h)\le 2\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки w_0 на выходе схемы S_h на наборе $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,1)=(0,0,1)$ и получим $w_0=\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки w_1 на выходе схемы S_h на наборе $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,0)=(0,0,0)$ и получим $w_1=\varepsilon$.

Лемма 5 доказана.

Теорема 2. *Пусть полный базис B содержит функцию* $\varphi(x_1,x_2,x_3)\in$ $\in M_2$. *Тогда любую булеву функцию f в базисе B можно реализовать схемой A так, что при всех* $\varepsilon\in(0, 1/960]$ *верно неравенство* $P(A)\le\varepsilon+100\varepsilon^2$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1,x_2,x_3)\in M_2\cup B$. Применима лемма 5, согласно которой в базисе B некоторую функцию $h\in G_2$, т.е. функцию вида $h(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\oplus x_3^{\sigma_3}$, $\sigma_i\in\{0,1\}$, $i\in\{1, 2, 3\}$, можно реализовать такой схемой S_h, что $P(S_h)\le 2\varepsilon$, а вероятности ошибок w_0, w_1 на выходе схемы S_h на наборах $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,1)$, $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,0)$ соотвественно удовлетворяют неравенствам $w_0\le\varepsilon$, $w_1\le\varepsilon$.

По лемме 2 функции $x_1\oplus x_2$ и $x_1\oplus x_2\oplus 1$ можно реализовать схемами S_1 и S_2 соответственно так, что $P(S_1)\le 5{,}2\varepsilon$ и $P(S_2)\le 5{,}2\varepsilon$. Следовательно, $p_\oplus=\max\{P(S_1),P(S_2)\}\le 5{,}2\varepsilon$.

По лемме 3, используя схему S_h, построим такую схему S_g, реализующую функцию $g(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3)^{\sigma_3}$, что $P(S_g)\le P(S_h)+2\,p_\oplus\le$ $\le 2\varepsilon+2\cdot 5{,}2\varepsilon\le 12{,}4\varepsilon$, а для вероятностей ошибок v_1 и v_0 схемы S_g на наборах (0,0,0) и (1,1,1) выполняются неравенства: v_1, $v_0\le\max\{w_0, w_1\}+2\,p_\oplus^2\le$ $\le\varepsilon+2(5{,}2\varepsilon)^2\le\varepsilon+54{,}1\varepsilon^2$ при $\varepsilon\in(0, 1/960]$.

Пусть f – произвольная булева функция.

Если $\sigma_3=1$, то возьмем три экземпляра схемы S, реализующей функцию f с ненадежностью $P(S)\le 5{,}2\varepsilon$ (по лемме 2 это возможно), а также один экземпляр схемы S_g и построим схему $\Phi(S)$ (рис. 2), реализующую функцию f. По лемме 1 оценим ненадежность построенной схемы $\Phi(S)$: $P(\Phi(S))\le$ $\le\varepsilon+54{,}1\varepsilon^2+3\cdot 5{,}2\varepsilon\cdot 12{,}4\varepsilon+3\cdot(5{,}2\varepsilon)^2\le\varepsilon+328{,}7\varepsilon^2\le 1{,}35\varepsilon$ при $\varepsilon\in(0, 1/960]$. По схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi^2(S)$. Применим лемму 1 и получим: $P(\Phi^2(S))\le$ $\le\varepsilon+54{,}1\varepsilon^2+3\cdot 1{,}35\varepsilon\cdot 12{,}4\varepsilon+3\cdot(1{,}35\varepsilon)^2\le\varepsilon+110\varepsilon^2\le 1{,}115\varepsilon$ при $\varepsilon\in(0, 1/960]$. По схеме $\Phi^2(S)$ построим схему $\Phi^3(S)$. Применим лемму 1 и получим: $P(\Phi^3(S))\le\varepsilon+54{,}1\varepsilon^2+3\cdot 1{,}115\varepsilon\cdot 12{,}4\varepsilon+3\cdot(1{,}115\varepsilon)^2\le\varepsilon+100\varepsilon^2$. Схема $\Phi^3(S)=A$ – искомая.

Если $\sigma_3=0$, то возьмем три экземпляра схемы S^0, реализующей функцию $\bar{f}$ с ненадежностью $P(S^0)\le 5{,}2\varepsilon$ (по лемме 2 это возможно), а также один экземпляр схемы S_g и построим схему $\Phi(S^0)$ (рис. 2), реализующую функцию f. По лемме 1 оценим ненадежность построенной схемы $\Phi(S^0)$: $P(\Phi(S^0)) \le \varepsilon + 54{,}1\varepsilon^2 + 3 \cdot 5{,}2\varepsilon \cdot 12{,}4\varepsilon + 3 \cdot (5{,}2\varepsilon)^2 \le \varepsilon + 328{,}7\varepsilon^2 \le 1{,}35\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. По схеме $\Phi(S^0)$ построим схему $\Phi^2(S^0)$. Применим лемму 1 и получим: $P(\Phi^2(S^0)) \le \varepsilon + 54{,}1\varepsilon^2 + 3 \cdot 1{,}35\varepsilon \cdot 12{,}4\varepsilon + 3 \cdot (1{,}35\varepsilon)^2 \le \varepsilon + 110\varepsilon^2 \le$ $\le 1{,}115\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. По схеме $\Phi^2(S^0)$ построим схему $\Phi^3(S^0)$. Применим лемму 1 и получим: $P(\Phi^3(S^0)) \le \varepsilon + 54{,}1\varepsilon^2 + 3 \cdot 1{,}115\varepsilon \cdot 12{,}4\varepsilon + 3 \cdot (1{,}115\varepsilon)^2 \le$ $\le \varepsilon + 100\varepsilon^2$. Схема $\Phi^3(S^0) = A$ – искомая.

Теорема 2 доказана.

Лемма 6. *Пусть* $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ (т.е. $\varphi(x_1,x_2,x_3) \in M_3$), *содержится в базисе B, тогда в базисе B можно построить такую схему* S_g, *реализующую функцию* $g(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$, *что* $P(S_g) \le 4\varepsilon$, *а вероятности ошибок* v_1 *и* v_0 *схемы* S_g *на наборах* (0,0,0) *и* (1,1,1) *равны:* $v_1 = 0$, $v_0 = \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ содержится в базисе B. Тогда функция $\varphi(\varphi(x_2,x_3,x_2),x_2,x_1) = x_1\bar{x}_2 \vee x_2 x_3 = m(x_1,x_2,x_3) \in G_3$, причем $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$. Поскольку для реализации функции m двух элементов достаточно, верно неравенство $P(S_m) \le 2\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки $P_0(S_m, (1,1,1))$ схемы S_m на наборе (1,1,1) и получим $P_0(S_m, (1,1,1)) = \varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки $P_1(S_m, (0,0,0))$ схемы S_m на наборе (0,0,0) и получим $P_1(S_m, (0,0,0)) = 0$.

Моделируя формулу $m(x_1, m(x_1,x_2,x_3), x_3)$, построим схему S_g, состоящую из четырех элементов и реализующую функцию $g(x_1,x_2,x_3) =$ $= x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$. Тогда $P(S_g) \le 4\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки v_1 схемы S_g на наборе (0,0,0) и получим $v_1 = 0$. Вычислим вероятность ошибки v_0 схемы S_g на наборе (1,1,1) и получим $v_0 = \varepsilon$.

Лемма 6 доказана.

Теорема 3. *Пусть полный базис B содержит функцию* $\varphi(x_1,x_2,x_3) \in M_3$. *Тогда любую булеву функцию f в базисе B можно реализовать схемой A так, что при всех* $\varepsilon \in (0, 1/960]$ *верно неравенство* $P(A) \le$ $\le \varepsilon + 16\varepsilon^2$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \in M_3 \cup B$. Тогда по лемме 6 функцию $g(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ можно реализовать такой схемой S_g, что $P(S_g) \le 4\varepsilon$, а вероятности ошибок v_1 и v_0 схемы S_g на наборах (0,0,0) и (1,1,1) соответственно равны $v_1 = 0$, $v_0 = \varepsilon$.

Пусть f – произвольная булева функция. Возьмем три экземпляра схемы S, реализующей функцию f с ненадежностью $P(S) \le 5{,}2\varepsilon$ (по лемме 2 это возможно), а также один экземпляр схемы S_g и построим схему $\Phi(S)$ (рис. 2), реализующую функцию f. По лемме 1 оценим ненадежность построенной схемы $\Phi(S)$: $P(\Phi(S)) \le \varepsilon + 3 \cdot 4\varepsilon \cdot 5{,}2\varepsilon + 3 \cdot (5{,}2\varepsilon)^2 \le \varepsilon + 143{,}5\varepsilon^2 \le 1{,}2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. По схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi^2(S)$. По лемме 1 оценим ненадежность схемы $\Phi^2(S)$ и получим $P(\Phi^2(S)) \le \varepsilon + 3 \cdot 4\varepsilon \cdot 1{,}2\varepsilon + 3 \cdot (1{,}2\varepsilon)^2 \le$ $\le \varepsilon + 18{,}72\varepsilon^2 \le 1{,}2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. По схеме $\Phi^2(S)$ построим схему $\Phi^3(S)$.

По лемме 1 оценим ненадежность схемы $\Phi^3(S)$ и получим $P(\Phi^3(S)) \leq \varepsilon + 3 \cdot 4\varepsilon \cdot 1{,}02\varepsilon + 3 \cdot (1{,}02\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 16\varepsilon^2$. Схема $\Phi^3(S) = A$ – искомая.

Теорема 3 доказана.

Выводы

1. Если полный конечный базис B содержит функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in M$, то любую булеву функцию f в базисе B можно реализовать схемой A так, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ верно неравенство $P(A) \leq \varepsilon + 100\varepsilon^2$.

2. При неисправностях типа 0 на выходах элементов функции множества M обладают тем же свойством, что и функции множества $M^* \cap G$, т.е. наличие их в полном конечном базисе B гарантирует реализацию почти всех булевых функций асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$.

В заключение укажем известные [3–6] на момент написания статьи функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ такие, что если полный конечный базис содержит функцию φ, то он обладает ε-свойством.

Булевы функции f_1 и f_2 назовем конгруэнтными, если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления). Пусть $X \subseteq B_3$. Обозначим $\mathrm{Congr}(X)$ – множество всех функций, зависящих от переменных x_1, x_2, x_3, каждая из которых конгруэнтна некоторой функции множества X. Например, $\mathrm{Congr}\{1, x_1, x_1 \& x_2\} = \{1, x_1, x_2, x_3, x_1 \& x_2, x_2 \& x_3, x_1 \& x_3\}$.

Обозначим $G^* = G \cap \mathrm{Congr}\{M^*\} \cap \mathrm{Congr}\{M\}$:

$$G^* = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cup Congr\{ x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\ x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3,$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3,\ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3,$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3,\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1\left(x_2 \vee x_3\right),\ \bar{x}_1\left(\bar{x}_2 \vee x_3\right),$$

$$\bar{x}_1\left(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\right),\ \bar{x}_1 \vee x_2x_3,\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2x_3,\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,\ (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3),$$

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3),\ (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3),$$

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3),$$

$$(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3),\ (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)\},$$

$|G^*| = 116$, в то время как $|G| = 56$.

Вопрос «Является ли множество G^* исчерпывающим, если базис $B \subseteq B_3$, а базисные элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах?» остается открытым.

Цель дальнейших исследований авторов – найти и описать **все** функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, наличие которых в полном конечном базисе B гарантирует реализацию почти всех булевых функций асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$.

Список литературы

1. **Редькин, Н. П.** Надежность и диагностика схем / Н. П. Редькин. – М. : Изд-во МГУ, 1992.
2. **Алехина, М. А.** О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных / М. А. Алехина, А. В. Васин // Ученые записки Казанского государственного университета. – 2009. – Т. 151. – Кн. 2. – С. 25–35. – (Физико-математические науки).
3. **Алехина, М. А.** Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем / М. А. Алехина. – Пенза : Информац.-издат. центр ПГУ, 2006. – 156 с.
4. **Алехина, М. А.** О надежности схем в одном базисе / М. А. Алехина // Проблемы автоматизации и управления в технических системах : труды Междунар. конф. (г. Пенза, 20–23 октября 2009 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – С. 43–44.
5. **Пичугина, П. Г.** Оптимальные схемы в специальном базисе / П. Г. Пичугина // Проблемы автоматизации и управления в технических системах : труды Междунар. конф. (г. Пенза, 20–23 октября 2009 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – С. 82–85.
6. **Алехина, М. А.** Достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными схемами с тривиальной оценкой ненадежности / М. А. Алехина, Д. М. Клянчина // Надежность и качество : труды Междунар. симпозиума (Пенза, 24–31 мая 2010 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2010. – Т. 1. – С. 229–232.
7. **Васин, А. В.** Необходимые и достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными схемами с ненадежностью 2ε / А. В. Васин // Дискретная математика и ее приложения : материалы X Международного семинара (г. Москва, 1–6 февраля 2010 г.). – М. : Изд-во мех.-мат. фак. МГУ, 2010. – С. 94–97.
8. **Алехина, М. А.** О надежности схем в базисах, содержащих медиану / М. А. Алехина // Дискретные модели в теории управляющих систем : труды VIII Междунар. конф. – М. : Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова ; МАКС Пресс, 2009. – С. 13–17.

Алехина Марина Анатольевна
доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой дискретной математики, Пензенский государственный университет

E-mail: dm@pnzgu.ru

Alekhina Marina Anatolyevna
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of discrete mathematics, Penza State University

Клянчина Дарья Михайловна
аспирант, Пензенский государственный университет

E-mail: dm@pnzgu.ru

Klyanchina Darya Mikhaylovna
Postgraduate student, Penza State University

УДК 519.718

Алехина, М. А.

Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в некоторых специальных базисах / М. А. Алехина, Д. М. Клянчина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 3–13.